

ARTÍCULO ORIGINAL

Análisis de estructura con doble simetría empleando el método de rigidez directo y sistematizado

Analysis of a structure with double symmetry using the direct and systematized stiffness method.

Marcos Rupay¹, Dayana Quispe¹, Frey Sánchez¹, Jessica Espinoza¹, Joel Alhuay¹ y Yesenia Castellón¹

RESUMEN

La investigación tiene por finalidad calcular las fuerzas internas de una estructura utilizando el método de rigidez directo y sistematizado. La metodología empleada consiste en simplificar la estructura usando su doble simetría, aplicar los métodos de rigidez y verificar resultados con un software. La estructura de estudio está compuesta por columnas y vigas, con deformación por flexión constante y deformación axial infinita. Se establecen tres grados de libertad (un desplazamiento y dos giros) que se toma como partida para el desarrollo de ambos métodos de análisis. En el primer método se emplearon el sistema Q-D, el sistema primario, el sistema complementario y el vector de deformaciones, sin embargo, en el método sistematizado se usaron el sistema Q-D (global), el sistema q-d (local), la matriz de transformación "A", la matriz de rigidez de cada barra, el ensamblaje de la matriz de rigidez, el vector de carga y el vector de deformación; el resultado de ambos casos de estudio son las fuerzas internas, que al compararse nos indican que los valores numéricos obtenidos son los mismos. Finalmente, se utilizó el software Ftool para verificar la precisión de los resultados, que corroboraron los cálculos manuales, validando la aceptabilidad de los métodos aplicados.

Palabras clave: Cortante, deformación axial, flexión, Ftool, sistema Q-D.

ABSTRACT

The research aims to calculate the internal forces of a structure using the direct and systematic stiffness methods. The methodology involves simplifying the structure using its double symmetry, applying stiffness methods, and verifying results with software. The structure under study consists of columns and beams, with constant flexural deformation and infinite axial deformation. Three degrees of freedom (one displacement and two rotations) are established as the basis for the development of both analysis methods. In the first method, the Q-D system, the primary system, the complementary system, and the deformation vector were used. In the systematic method, the global Q-D system, the local q-d system, the transformation matrix "A," the stiffness matrix of each bar, the assembly of the stiffness matrix, the load vector, and the deformation vector were utilized. The results from both methods are internal forces, which, when compared, indicate that the numerical values obtained are the same. Finally, the Ftool software was used to verify the accuracy of the results, which confirmed the manual calculations, validating the acceptability of the applied methods.

Keywords: Shear, axial deformation, bending, Ftool, Q-D system.

*Autor para correspondencia

1 Universidad Nacional Intercultural de la Selva Central Juan Santos Atahualpa, Perú. Email: mrupay@uniscjsa.edu.pe, 73579338@uniscjsa.edu.pe, 72240420@uniscjsa.edu.pe, 75282760@uniscjsa.edu.pe, 72906807@uniscjsa.edu.pe, 74554356@uniscjsa.edu.pe

INTRODUCCIÓN

Según Boscarino et al. (2007) la simetría es una alternativa para alcanzar el equilibrio, asegurando que las fuerzas aparentes se compensen entre sí y que todos los elementos actúen eficientemente; así Pérez (2012) indica que una estructura que es simétrica y tiene carga simétrica se puede reducir a media estructura, bajo este concepto la estructura de estudio presenta una simetría de geometría, rigidez y apoyos indicando la aplicación de una doble simetría, esto reduce la estructura al grado tal que el análisis se realice en una cuarta parte del total.

Godiño et al. (2017) mencionan que los grados de libertad de una estructura son la mínima cantidad de parámetros (desplazamientos de traslación y rotación) que proporcionan una descripción única de la estructura deformada. Por ello para la selección del sistema Q-D, se elige el sistema de desplazamientos nodales a analizar; considerando que varía según la forma y las características del diseño.

Según Ramón (2020) menciona que el método de la rigidez es especialmente útil para estructuras hiperestáticas, donde las ecuaciones de equilibrio no son suficientes para determinar todas las fuerzas internas. Asimismo, Rupay et al. (2023) indican que el cálculo utilizado en el enfoque de rigidez directa es relevante para una construcción hiperestática que se encuentra compuesta por una cantidad determinada de elementos estáticos con un comportamiento lineal, por otro lado desde el punto de vista de Hurtado (2013), el enfoque directo implica ensamblar la matriz de rigidez de las partes estructurales teniendo en cuenta la compatibilidad de los desplazamientos; puesto que se hace una transferencia de información del sistema local al global, con énfasis en la relación en los desplazamientos en los puntos nodales. Estas investigaciones subrayan la relevancia y la efectividad del método de rigidez en el análisis de construcciones complejas en ingeniería estructural.

Así, Vargas et al. (2023) indican que el principal beneficio del enfoque sistematizado de la rigidez es la habilidad para evaluar estructuras con componentes múltiples en cuanto a material y forma. Además, debido a su formulación matricial, el análisis puede automatizarse, lo que acelera el procedimiento y disminuye la probabilidad de error humano; de acuerdo con Celigüeta (1998), el enfoque de rigidez sistematizado se utiliza para determinar las características de rigidez de los componentes y resolver ecuaciones de equilibrio para hallar desplazamientos y fuerzas internas. Este enfoque, ampliamente utilizado en softwares de análisis estructural, evalúa la eficiencia, seguridad y estabilidad de las estructuras bajo diversos escenarios de carga para así maximizar el diseño y garantizar la integridad estructural, Kassimali y Prashant (2011) sugieren el método de la rigidez sistematizada como un método de análisis estructural que utiliza matrices para expresar la rigidez de los elementos, además, permite descomponer y resolver problemas estructurales mediante ecuaciones matriciales, lo que facilita determinar deformaciones, fuerzas internas y reacciones dentro de la estructura.

De acuerdo con Rupay et al. (2024), los pasos a seguir para resolver un ejercicio del método de rigidez es la identificación y descomposición de la estructura, formulación de la matriz de cada elemento, ensamblaje de la matriz global, cálculo de desplazamientos y reacciones; por otro lado, el método directo de la rigidez resuelve los desplazamientos nodales y las reacciones en los soportes ensamblando la matriz de rigidez y particionándola para separar los nodos libres de los restringidos, se resuelven las ecuaciones de equilibrio para los desplazamientos nodales y luego se calculan las reacciones de soporte (Leet et al., 2018). Teniendo claro los conceptos antes presentados se analiza las estructuras para hallar las fuerzas internas actuantes, considerando que los métodos aplicados manualmente nos arrojan resultados fiables, pero se intenta probar cual de estos métodos nos indicaran los valores numéricos más exactos. Una forma fácil y sencilla de comprobar los resultados es la empleabilidad de un software, así Silva (2017) afirma que el Ftool proporciona análisis detallados, incluidos diagramas de fuerza internas y estructuras deformadas, y hace que el proceso de definición de modelos estructurales sea más eficiente. Su precisión a la hora de proporcionar resultados para combinaciones de carga complejas lo convierte aún más en una herramienta importante en ingeniería estructural.

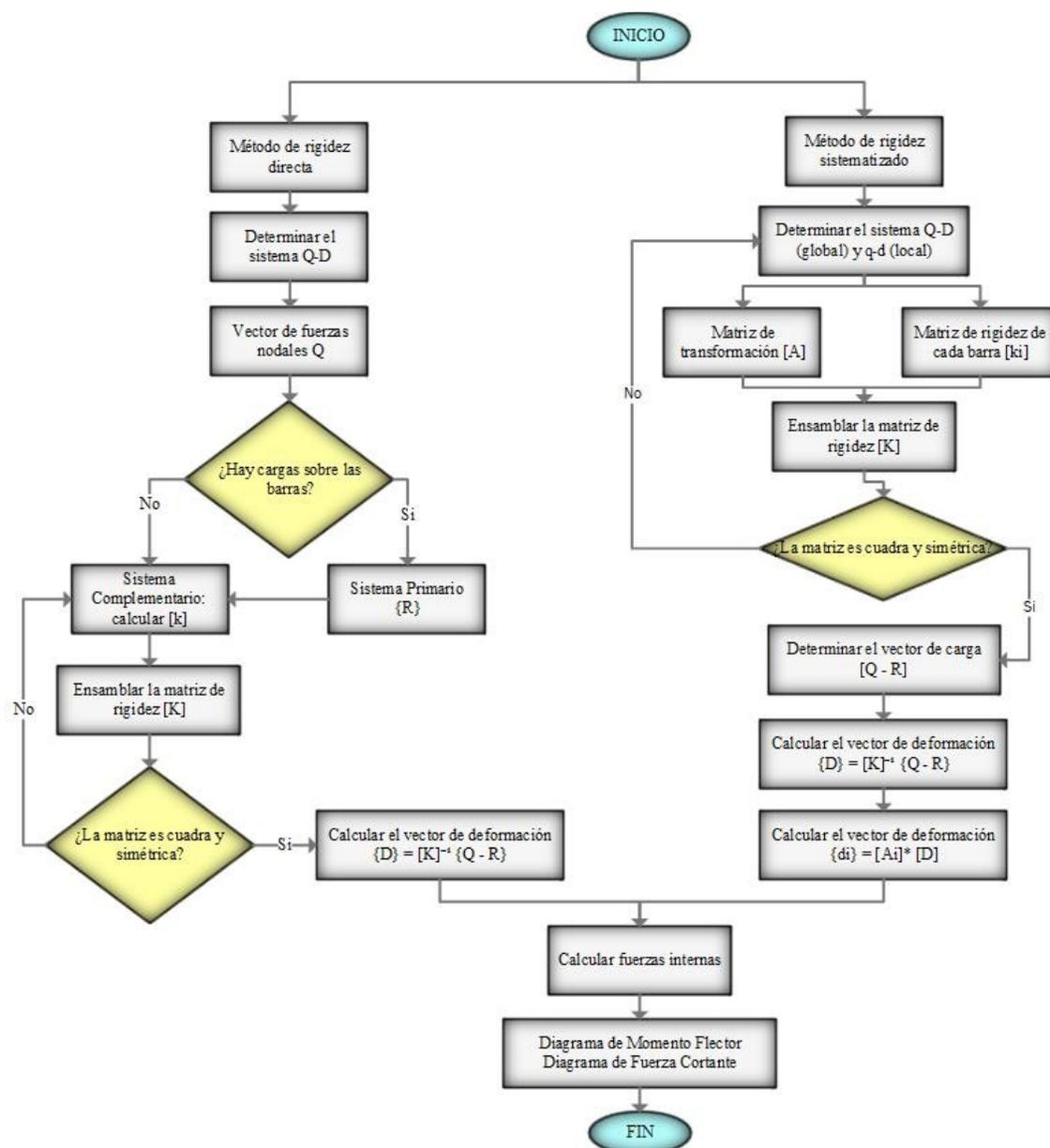
Este artículo se planteó originalmente con la finalidad de ampliar el conjunto de conocimientos que ofrece recursos útiles a profesionales, académicos y estudiantes. Además de validar investigaciones anteriores que se concentraron en un método particular; este artículo contribuye a expandir el acervo de conocimientos dentro del campo del análisis estructural al ofrecer una comparación exhaustiva de dos enfoques; tiene como propósito determinar cuál de los dos es más eficaz en términos de precisión, tiempo de cálculo y viabilidad, donde se validan los resultados con el programa FTOOL. Las limitaciones de este trabajo de investigación es que los resultados pueden ser específicos para el problema estructural analizado y pueden no ser generalizables a otros tipos de estructuras o condiciones de carga.

MATERIALES Y MÉTODOS

Según Ottazzi (2010) el método de rigidez tiene fases direccionadas al análisis de estructuras, donde se utilizan las ecuaciones de equilibrio de nudo, las relaciones de compatibilidad y las ecuaciones constitutivas para llegar a una solución.

A su vez, Cervera y Blanco (2002) menciona que el método de rigidez cuenta con una gran ventaja sobre los demás, ya que este es un planteamiento sistemático del método de equilibrio que tiene su fundamento bajo los principios de compatibilidad, equilibrio, linealidad y superposición. También es de resaltar que la matriz de rigidez de la estructura es una matriz cuadrada conformada por la matriz de rigidez de cada elemento (Tena, 2007).

Figura 1
Diagrama de flujo de la metodología aplicada



Método directo de la rigidez

- Selección del sistema Q - D: Se elige el sistema de desplazamientos nodales.
- Determinar el vector de fuerzas nodales $\{Q\}$: en función a los grados de libertad.
- Determinar el sistema primario $\{R\}$ considerando las cargas sobre la barra.
- Calcular $[k]$ con el sistema complementario.
- La matriz de rigidez $[k]$: Se ensambla la matriz considerando los coeficientes por barras.
- Calcular el vector de deformación $[D]$: desplazamientos nodales $\{D\} = [K]^{-1} \{Q\}$.
- Calcular las fuerzas internas $[Q]$: Se calculan las fuerzas internas a partir de los desplazamientos.

Método sistematizado de la rigidez

- Determinar el sistema Q-D y q-d
- Calcular las matrices de rigidez $[k_i]$ y transformación de cada barra $[A_i]$.
- Ensamblar la matriz de la estructura $[K]=\sum \dot{i}\dot{i}$
- Determinar el vector de carga de la estructura $[Q-R]=[Q]*\sum \dot{i}\dot{i}$
- Calcular las deformaciones en los GDL $[D]=[K]^{-1}*[Q-R]$
- Encontrar las deformaciones en los GDL (q-d) $[d_i]=[A_i]*[D]$
- Encontrar las fuerzas internas en los GDL (q-d) $[q_i]=[k_i]*[d_i]+[r_i]$

Software ftool

El software Ftool es capaz de resolver problemas de análisis estructural. Permite modelar de manera sencilla y eficaz, ofreciendo gran precisión en los resultados (Mascarenhas et al., 2020).

Casos de estudio

Para el respectivo estudio se ideó la siguiente estructura de análisis:

La estructura es simétrica con carga simétrica, simplificándose por simetría horizontal y vertical, como parte de sus propiedades se considera una deformación de flexión constante ($EI=cte.$), una deformación axial (EA) infinita.

La investigación se desarrolla con los siguientes métodos:

- Método directo de la rigidez.
- Método de rigidez sistematizado.

Caso 1. Método directo de la rigidez

Figura 2

Estructura propuesta

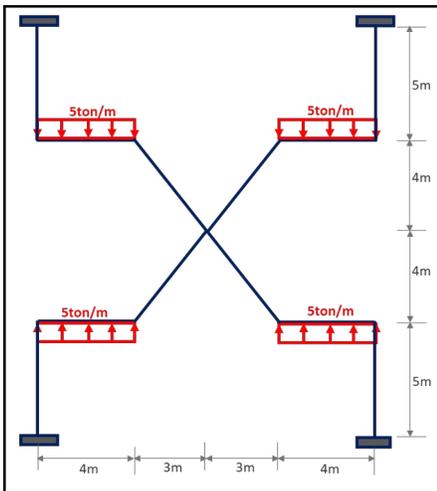


Figura 3

Estructura resultante de la simetría.

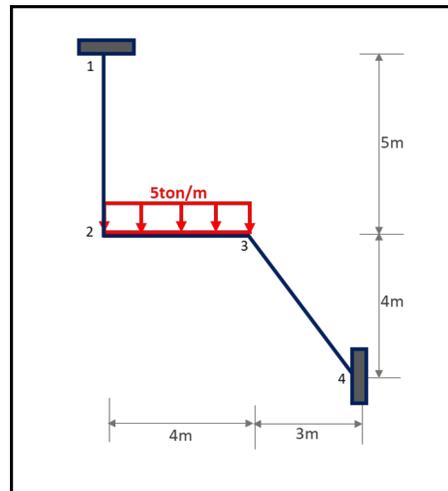


Figura 4
Sistema Q-D

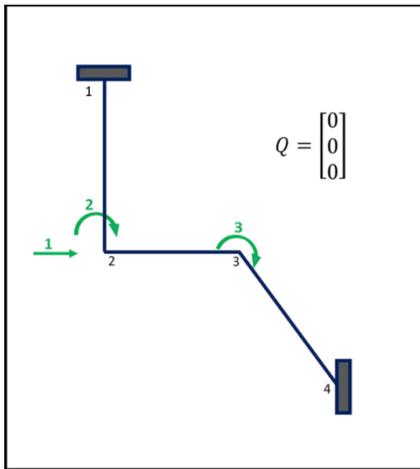


Figura 5
Sistema primario

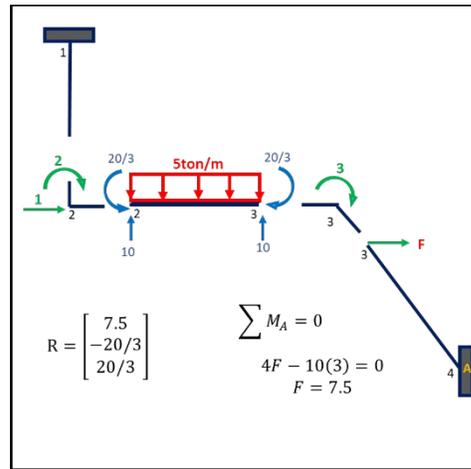


Figura 6
Sistema complementario $D1=1$

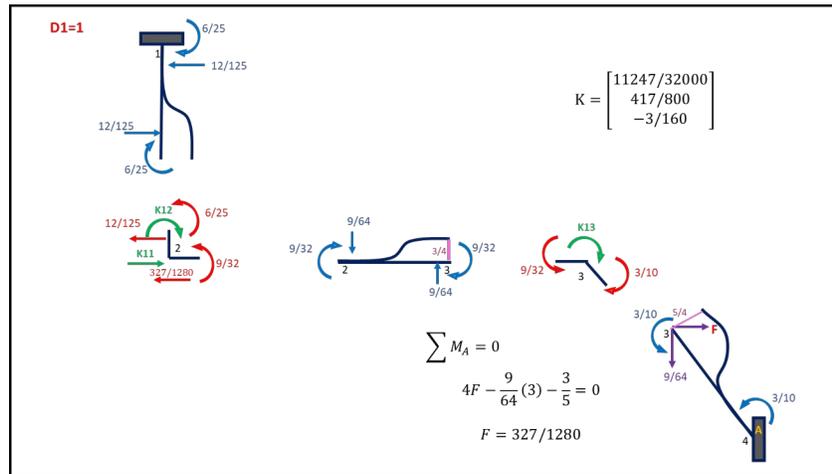


Figura 7
Sistema complementario $D2=1$

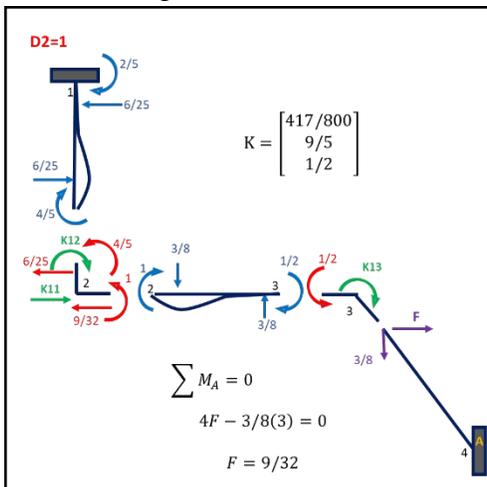
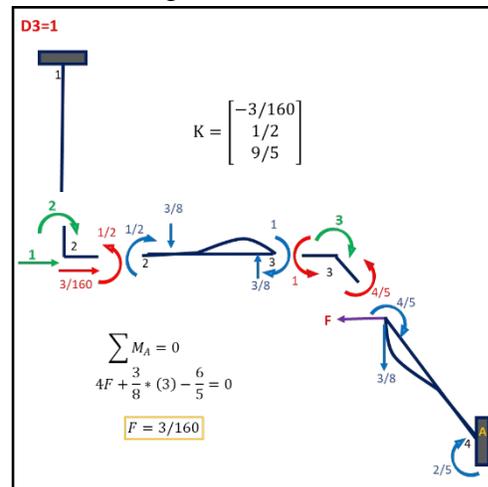


Figura 8
Sistema complementario $D3=1$



a. **Matriz de rigidez.**

$$[K] = \begin{bmatrix} 11247/32000 & 417/800 & -3/160 \\ 417/800 & 9/5 & 1/2 \\ -3/160 & 1/2 & 9/5 \end{bmatrix}$$

b. **Vector de deformaciones.**

$$[D] = [K]^{-1} * ([Q] - [R])$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 11247/32000 & 417/800 & -3/160 \\ 417/800 & 9/5 & 1/2 \\ -3/160 & 1/2 & 9/5 \end{bmatrix}^{-1} * \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7.5 \\ -20/3 \\ 20/3 \end{pmatrix} \right) = \frac{\begin{bmatrix} -55.683 \\ 22.776 \\ -10.61 \end{bmatrix} * 1}{EI}$$

c. **Fuerzas internas (Momento flector)**

$$[Q_{DMF}] = [R] + [k] * [D]$$

$$[Q_{DMF}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -20/3 \\ 20/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 6/25 & 2/5 & 0 \\ 6/25 & 4/5 & 0 \\ 9/32 & 1 & 1/2 \\ 9/32 & 1/2 & 1 \\ 3/10 & 0 & 4/5 \\ 3/10 & 0 & 2/5 \end{bmatrix} EI * \begin{bmatrix} -55.683 \\ 22.776 \\ -10.61 \end{bmatrix} \frac{1}{EI} = \begin{bmatrix} -4.254 \\ 4.857 \\ -4.857 \\ -8.217 \\ 8.217 \\ -12.461 \end{bmatrix} \text{tn} * m$$

d. **Fuerzas internas (Fuerza cortante)**

$$[Q_{DFC}] = [R] + [k] * [D]$$

$$[Q_{DFC}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -12/125 & -6/25 & 0 \\ 12/125 & 6/25 & 0 \\ -9/64 & -3/8 & -3/8 \\ 9/64 & 3/8 & 3/8 \\ 3/25 & 0 & -6/25 \\ -3/25 & 0 & 6/25 \end{bmatrix} EI * \begin{bmatrix} -55.683 \\ 22.776 \\ -10.61 \end{bmatrix} \frac{1}{EI} = \begin{bmatrix} -0.121 \\ 0.121 \\ 13.268 \\ 6.732 \\ -4.135 \\ 4.135 \end{bmatrix}$$

Figura 9
Diagrama de momento flector

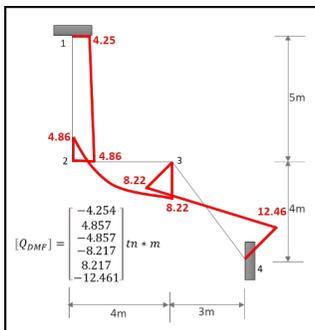
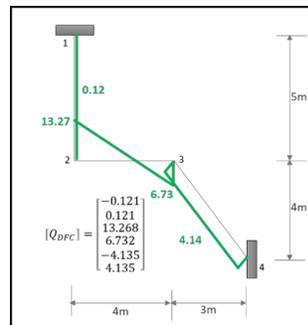


Figura 10
Diagrama de fuerza cortante



Caso 2. Método de rigidez sistematizado.

Figura 11
Sistema global Q-D

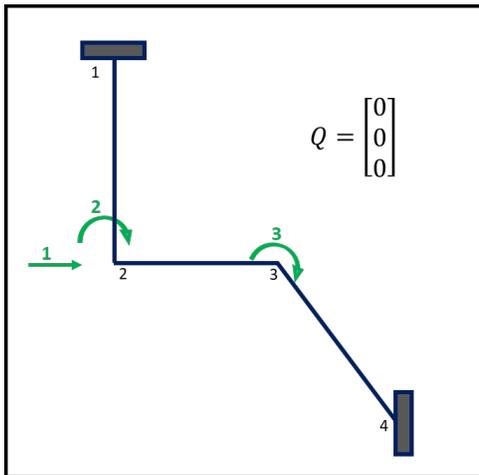


Figura 12
Sistema local q-d

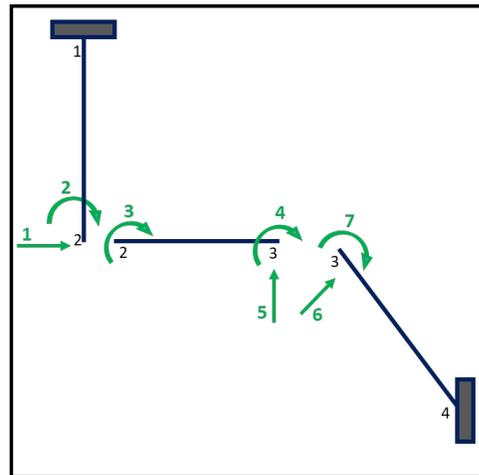


Figura 13
D1=1 matriz de transformación.

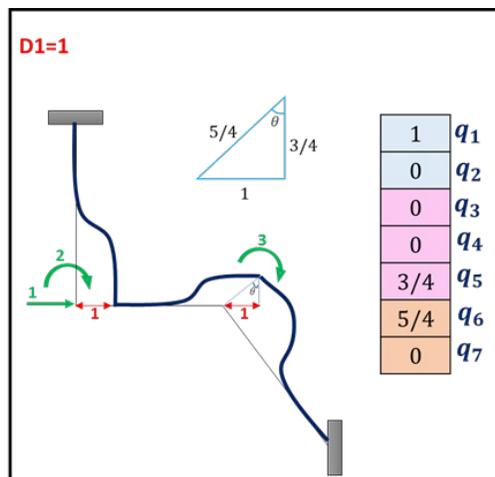


Figura 14
D2=1 matriz de transformación.

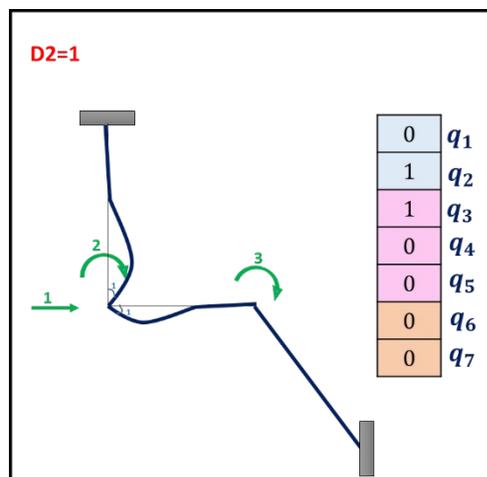


Figura 15
D3=1 matriz de transformación.

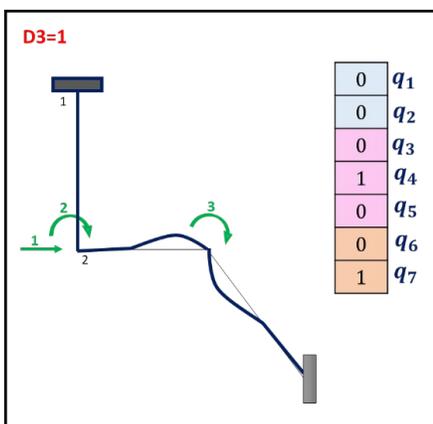


Figura 16
Matriz de rigidez para la barra 1-2.

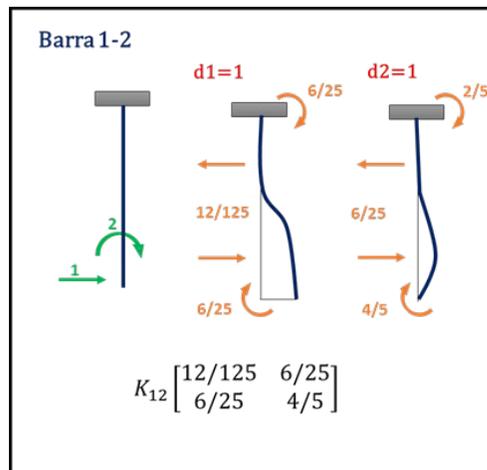


Figura 17

Matriz de rigidez de la barra 2-3.

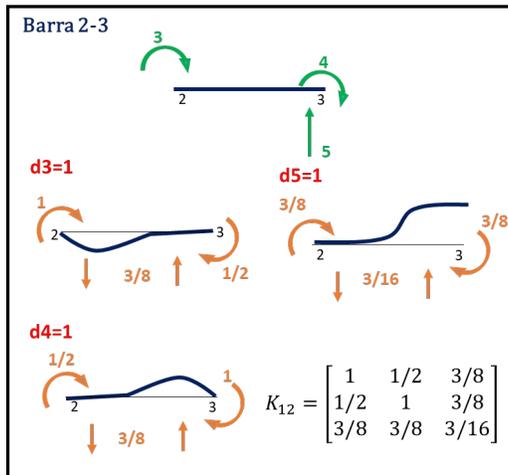
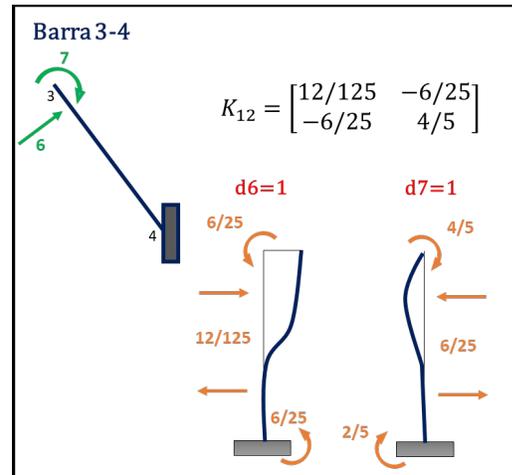


Figura 18

Matriz de rigidez en la barra 3-4.



a. Ensamblaje de la matriz de rigidez.

$$[K] = \sum ([A^T] * [K_i] * [A_i])$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{12}{25} & \frac{6}{5} \\ \frac{6}{25} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{16} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{12}{25} & \frac{-6}{25} \\ \frac{-6}{25} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 0.351 & 0.521 & -0.019 \\ 0.521 & 1.800 & 0.500 \\ -0.019 & 0.500 & 1.800 \end{bmatrix}$$

b. Vector de carga.

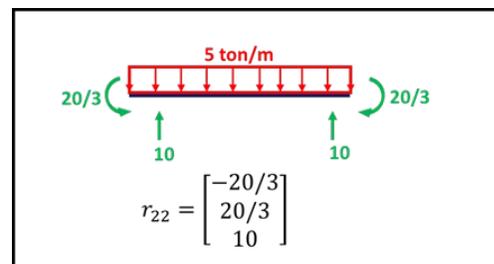
$$[R] = [A_i]^T * [r_1]$$

$$[R] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3/4 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -20/3 \\ 20/3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$[R] = \begin{bmatrix} 15/2 \\ -20/3 \\ 20/3 \end{bmatrix}$$

Figura 19

Vector de carga.



c. Vector de deformaciones.

$$[D] = [K]^{-1} * ([Q] - [R])$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 11247/32000 & 417/800 & -3/160 \\ 417/800 & 9/5 & 1/2 \\ -3/160 & 1/2 & 9/5 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{15}{2} \\ -\frac{20}{3} \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -55.683 \\ 22.776 \\ -10.61 \end{bmatrix}$$

d. Fuerzas Internas

$$[Q] = r_i + k_i * (A_i * xD)$$

$$[q_{12}] = 0 + \begin{bmatrix} 12/125 & 6/25 \\ 6/25 & 4/5 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -55.683 \\ 22.776 \\ -10.61 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.121 \\ 4.857 \end{bmatrix}$$

$$[q_{23}] = \begin{bmatrix} -\frac{20}{3} \\ \frac{20}{3} \\ \frac{3}{10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{16} \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -55.683 \\ 22.776 \\ -10.61 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -4.857 \\ -8.217 \\ 6.732 \end{bmatrix}$$

Figura 20

Fuerzas para DMF.

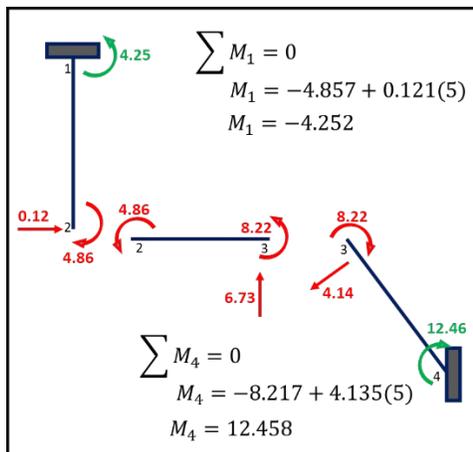
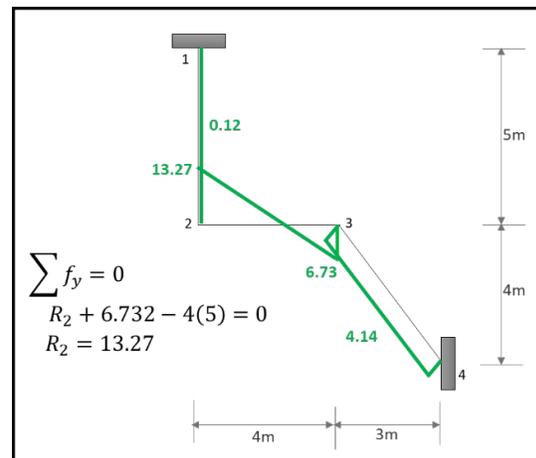


Figura 21

DFC.



RESULTADOS

Los resultados obtenidos con el método de rigidez directa y método sistematizado muestran las fuerzas internas actuantes y a partir de ellas se generan sus respectivos diagramas; estos se comparan con los valores arrojados por el software Ftool.

Tabla 1

Resultados de momento flector.

Método	Nodo 1	Nodo 2	Nodo 3	Nodo 4
Directo	-4.254	4.857	8.217	-12.461
Sistematizado	-4.252	4.857	8.217	12.458
Ftool	-4.253	4.857	8.215	-12.458

Nota. En esta tabla se muestran los resultados de momento flector del método directo, sistematizado y ftool para analizar la variación de exactitud.

Figura 22

DMF obtenido con el método de rigidez directa.

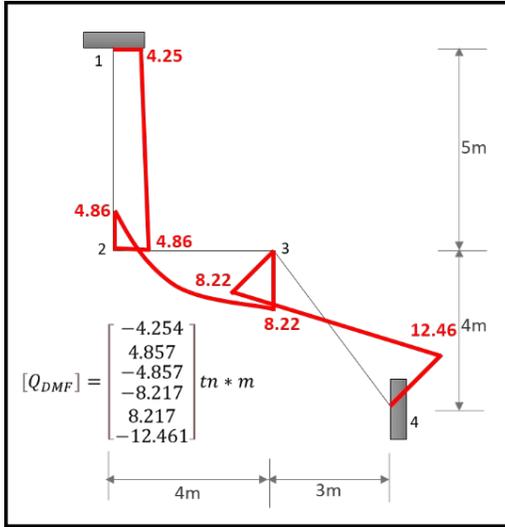


Figura 23

DMF obtenido con el método sistematizado.

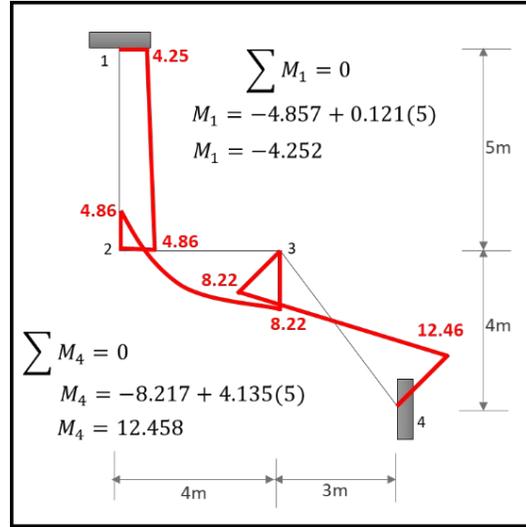


Figura 24

DMF con el software ftool.

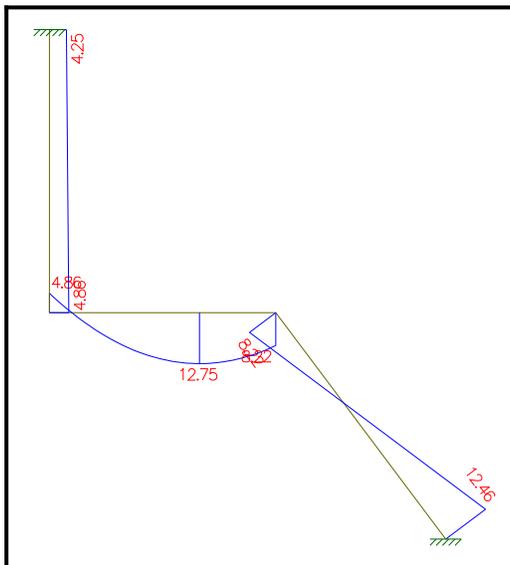


Figura 25

DMF para la estructura total

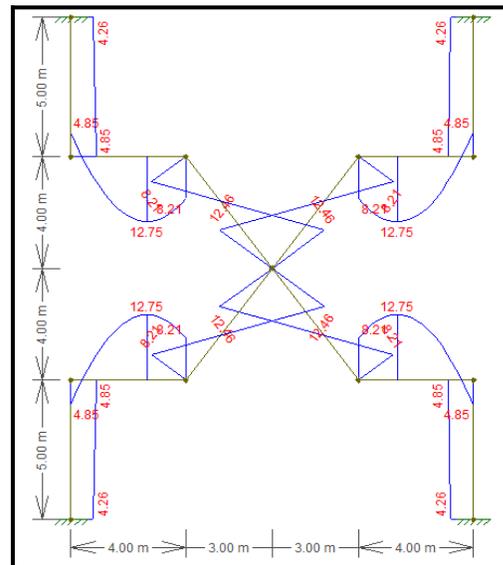


Tabla 2

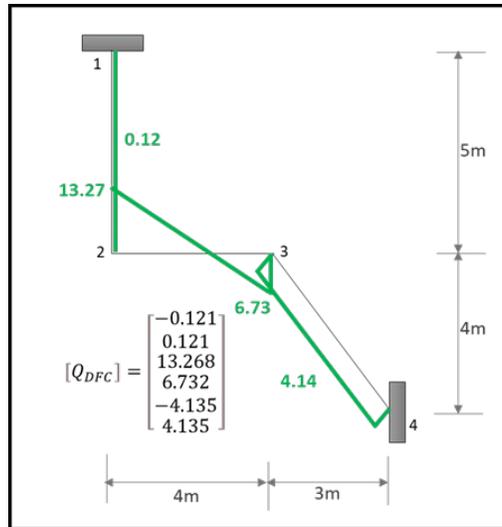
Resultados de fuerza cortante.

Método	Elemento 1-2		Elemento 2-3		Elemento 3-4	
Directo	-0.121	0.121	-0.121	0.121	-0.121	0.121
Sistematizado	13.268	6.732	13.268	6.732	13.268	6.732
Ftool	-4.135	4.135	-4.135	4.135	-4.135	4.135

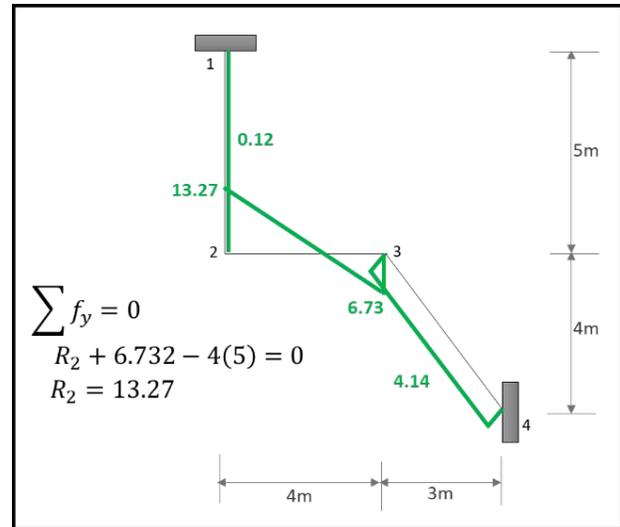
Nota. En esta tabla se muestran los resultados de fuerza cortante del método directo, sistematizado y ftool para analizar la variación de exactitud.

Figura 26

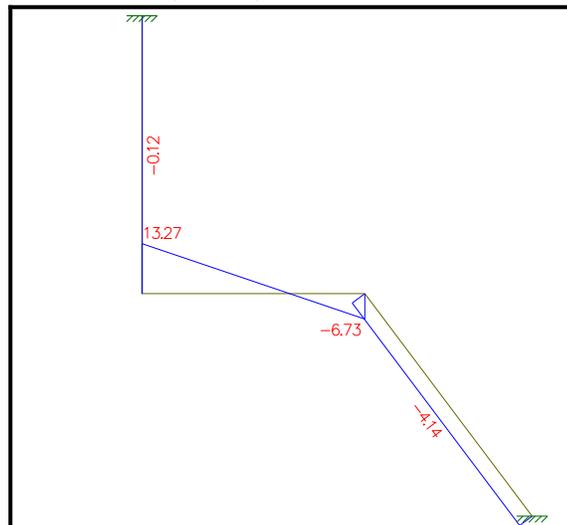
DFC obtenido con el método de rigidez directa.

**Figura 27**

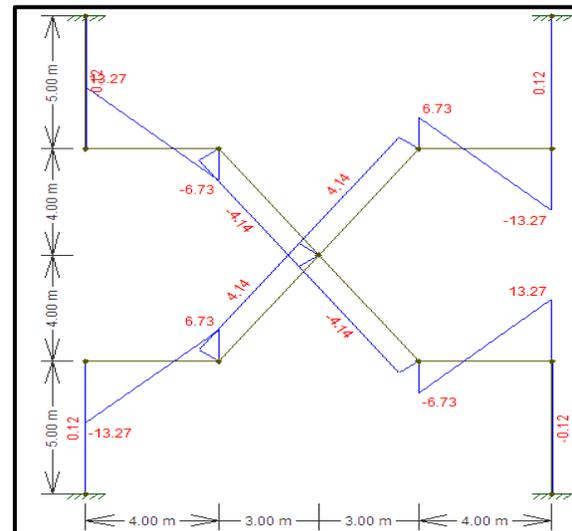
DFC obtenido con el método sistematizado.

**Figura 28**

DFC con el software ftool.

**Figura 29**

DFC de toda la estructura



DISCUSIÓN

De acuerdo con Celigüeta (2022) una estructura simétrica nos permite simplificar los cálculos, permitiendo reducir la estructura a la mitad, la cuarta u octava parte, esto dependerá de la cantidad de ejes

de simetría que tenga la estructura. En este caso se presenta una doble simetría que permite estudiar una cuarta parte para luego generalizarla a toda la estructura.

La base para el método de rigidez es aplicar los desplazamientos unitarios mediante el principio de superposición, demostrando que la superposición de desplazamiento nos direcciona a una serie de ecuaciones en que la significancia física indica que las cargas en los nodos (del sistema Q-D) se representan como combinaciones lineales de los desplazamientos nodales (Ottazzi, 2010).

Cabe indicar que al desarrollar el ejercicio por el método de rigidez directa se estableció los grados de libertad globales de la estructura y sobre estas se obtuvo los coeficientes correspondientes a dichos grados de desplazamiento y giro; teniendo así la matriz de rigidez de la estructura que nos permite generar el vector de deformaciones para hallar las fuerzas internas. En el caso del análisis por el método de rigidez sistematizado se estableció los grados de libertad en un sistema global (GDL de toda la estructura) y un sistema local (GDL por cada elemento), esto nos permite sistematizar el proceso generando la matriz de rigidez (local) para cada elemento que ensamblaran la matriz global de la estructura con la interacción de la matriz de transformación; con ello se obtiene el vector de deformaciones con el que se hallará las fuerzas internas para cada elemento de la estructura (San Bartolomé, 1998).

Sin embargo, Godiño et al (2017) resalta la importancia de utilizar un software para el análisis de estructuras como herramienta que permita la competencia en el mercado profesional, en tal sentido el uso de los programas permite reducir el tiempo obteniendo un resultado con mayor precisión siempre que se introduzca los datos correctamente.

CONCLUSIONES

En este estudio se aprovechó el doble eje de simetría para reducir la estructura a la cuarta parte, considerando el apoyo de corte como un apoyo empotrado. Se planteó tres grados de libertad globales, en el caso del análisis por el método de rigidez directa, estos tres grados de libertad nos permitieron evaluar la matriz de rigidez y obtener las fuerzas internas de la estructura; para el método sistematizado se emplearon los grados de libertad locales con los que se obtuvo las fuerzas internas para cada elemento de la estructura; sin embargo, al comparar ambos métodos encontramos fuerzas internas idénticas. Con los diagramas generados por el software Ftool se validan los resultados con una gran exactitud, lo que nos permite afirmar que en esta estructura ambos métodos son igual de exactos, así como afirmar que la aplicación de los ejes de simetría simplifica el análisis, ya que los resultados obtenidos en una cuarta parte de la estructura se pueden generalizar teniendo en consideración el sentido de los elementos.

Se concluye afirmando que tanto el método rigidez directa como sistematizada arrojan resultados exactos, pero el método sistematizado es más viable en cuanto al tiempo de resolución, recomendando emplear los ejes de simetría en próximos estudios, ya que estos facilitan el análisis.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Boscarino, E., Julia, S., Gonzalez, P., Garcia, M., Lorenzo, V., Diaz, M. E., Marcotullio, C., Moreno, L., y Marquez, S. Y. V. (2007). *SIMETRIA Y ASIMETRIA EN LA RESOLUCION DEL DISEÑO*.
- Carlos Javier Silva Castillo. (2017). *Eficacia del software educativo en el análisis estructural clásico* [Tesis, Universidad Nacional de Piura Escuela de Posgrado]. <https://www.tecgraf.puc-rio.br/ftool/downloads/CarlosCastillo-EficaciaDelSoftwareEducativoEnElAnalisisEstructuralClasico.pdf>
- Celigüeta, J. Tomás. (1998). *Curso de análisis estructural*. Eunsa.
- Celigüeta-Lizarza, J. T. (Juan T. (2022). *Curso de Análisis Estructural*. <https://dadun.unav.edu/handle/10171/64362>
- Cervera Ruiz, M., y Blanco Diaz, E. (2002). *Mecánica de estructuras, métodos de análisis* (2.ª ed.). CPET (Centre de Publicacions del Campus Nord).
- Godiño Poma, F., López Yarango, J. S., y Rupay Vargas, M. J. (2017). *Análisis Estructural Método energético y matricial con Aplicaciones Mathcad* (1.ª ed.).
- Herrero Pérez David. (2012). *Estructuras de Edificación: Tema 22—Simplificaciones en estructuras simétricas*.
- Hurtado Gómez, J. E. (2013). *Análisis matricial de estructuras: Curso con MATLAB*. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/12205>
- Kassimali, A., y Prashant, A. (2011). *Structural analysis* (4th ed., SI ed. / prepared by Amit Prashant). Cengage Learning.
- Leet, K., Uang, C.-M., Lanning, J., y Gilbert, A. M. (2018). *Fundamentals of structural analysis* (Fifth edition). McGraw-Hill Education.
- Mascarenhas, F. J. R., Christoforo, A. L., y Carvalho, R. C. (2020). A Utilização De Um Software Livre Para Determinação Dos Esforços Internos De Cargas Móveis Em Vigas De Pontes De Concreto. *HOLOS*, 3, 1-18. <https://doi.org/10.15628/holos.2020.9466>
- Ottazzi Pasino, G. (2010). *Análisis Estructural I*. studylib.es. <https://studylib.es/doc/9017550/análisis-estructural-i---gianfranco-ottazzi>
- Ramón Zamora, J. A. (2020). *Análisis estático de un pórtico plano de siete pisos mediante el método de rigidez y comprobación con el software calsap*. <http://repositorio.utmachala.edu.ec/handle/48000/15444>
- Rupay, M., Baltazar, Y., Flores, A., y Reyes, A. (2024). Brazo rígido en pórticos empleando el método de rigidez sistematizado. *Revista Científica Ciencias Ingenieriles*, 4(1), Article 1. <https://doi.org/10.54943/ricci.v4i1.382>
- Rupay, M., Rivera, G. F., Espejo, J., y Manuel, J. (2023). Análisis comparativo de los resultados de la aplicación del método directo de la rigidez para armaduras planas con asentamientos. *Revista Científica Ciencias Ingenieriles*, 3(2), Article 2. <https://doi.org/10.54943/ricci.v3i2.272>
- San Bartolomé Ramos, Á. F. (1998). *Análisis de edificios*. Pontificia Universidad Católica del Perú. <https://doi.org/10.18800/9789972421129>
- Tena Colunga, A. (2007). Análisis de estructuras con métodos matriciales. En *Editorial Limusa*.
- Vargas, M. J. R., Ariza, Y. A. B., y Quispe, A. L. M. (2023). Análisis estructural de un pórtico aplicando el método de rigidez. *Polo del Conocimiento*, 8(12), Article 12. <https://doi.org/10.23857/pc.v8i12.6362>