

Análisis de gráficas de funciones y su incidencia en la interpretación del fenómeno en el estudio del cálculo

Analysis of graphs of functions and their incidence in the interpretation of the phenomenon in the calculation study

Leonardo Damián S¹., Lenin Quiñones H². y Juan C Damián S³.

RESUMEN

Esta investigación se centró en el análisis de los aciertos y dificultades que estudiantes de Ingeniería mostraron al realizar las actividades cognitivas de tratamiento y conversión en los diferentes registros de representación semiótica del objeto función real de variable real. Con respecto a la experimentación y análisis se elaboró y aplicó un cuestionario exploratorio compuesto de tres actividades, con el propósito de que los estudiantes apliquen sus conocimientos básicos de matemática traídos de la educación básica. Los resultados muestran que la mayoría de los estudiantes tiene dificultades al hacer el tratamiento en los registros de representación semiótica y la conversión entre ellos, esto se evidencia en la primera actividad donde el estudiante no logró la conversión del registro gráfico al registro algebraico, así mismo en las dos últimas actividades los estudiantes no lograron realizar el tratamiento y la conversión de los distintos registros de representación semiótica.

Palabras clave: función, análisis, interpretación, representación.

ABSTRACT

This research focused on the analysis of the successes and difficulties that Engineering students showed when carried out the cognitive activities of treatment and conversion in the different registers of semiotic representation of the real function object of real variable. With respect to experimentation and analysis, an exploratory questionnaire composed of four activities was elaborated and applied, with the purpose that students apply their basic knowledge of mathematics brought from basic education.

The results show that most of the students have difficulties when doing the treatment in the registers of semiotic representation and the conversion between them, this is evidenced in the first two activities where the students did not achieve the conversion of the graphic record to the algebraic record, as well same in the last two activities the students did not manage to carry out the treatment and the conversion of the different registers of semiotic representation.

Keywords: function, analysis, interpretation, representation.

1. Universidad Nacional de Jaén, Perú. Email: ldamiansandoval@unj.edu.pe

2. Universidad Nacional de Jaén, Perú. Email: lenin.quinones@unj.edu.pe

3. Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, Perú. Email: jdamians.2014@gmail.com

INTRODUCCIÓN

Dentro de la formación básica de un estudiante universitario en ciencias o ingeniería, juega un papel muy importante los conocimientos sobre matemática. Sin embargo, en la actualidad el proceso de enseñanza-aprendizaje ha cambiado gracias al avance de la tecnología y es diferente lo que era hace quince o veinte años, debido a diversos factores, por ejemplo, el modo en que acceden al conocimiento. Por lo tanto, es imprescindible manejar tanto las metodologías como las teorías didácticas modernas de enseñanza-aprendizaje, y la Matemática no escapa de este diagnóstico. Por ello, se requiere un cambio de enseñanza en el sistema universitario, en particular en los docentes que enseñan matemática para ciencias e ingeniería; estos requieren que tomen conciencia y reflexionen en torno a la implementación de innovaciones metodológicas y pedagógicas en el aula, acordes a estos cambios (Malaspina, 2012).

La teoría de los registros de representación semióticos de Raymond Duval (1985), permite estudiar fenómenos para el desarrollo del pensamiento matemático, uno de los principales supuestos es que la actividad matemática se apoya en el empleo de diversas representaciones semióticas las cuales se organizan en torno a registros de representación; su estudio permite comprender la complejidad de la actividad matemática ya que en ella se realizan constantes transformaciones en el mismo registro y entre registros (Duval R. , 2004, sf).

Al respecto, Damm (2002) menciona que “en diferentes investigaciones sobre educación matemática, se observa que los estudiantes presentan dificultades para realizar la conversión entre los diferentes registros de representación semiótica de un objeto matemático” (Citado en Justin, Olivera y Moreno, 2014, p. 133).

Por otro lado, en la ingeniería didáctica, como metodología de investigación se caracteriza por el registro de los estudios de caso y cuya validación es esencialmente interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori, lo que se planificó, y a posteriori, lo que realmente sucedió. (Artigue, Douady y Moreno, 1995, p.37).

El presente trabajo surge del interés de analizar cómo se produce la comprensión de la noción de función a través de sus diversos tipos de representación semiótica. Además, por las dificultades que presentan los estudiantes en el primer año de estudios universitarios para resolver problemas sobre funciones. El objetivo de esta investigación consistió en realizar el diagnóstico sobre el nivel de análisis e interpretación del objeto función en sus diferentes formas de representación semiótica de los estudiantes del primer ciclo de la carrera profesional de Ingeniería Mecánica y Eléctrica. Para lograr este cometido, se analizó y valoró los resultados basados en las teorías de los registros de

representación semiótica de Raymond Duval y la metodología de la ingeniería didáctica respectivamente.

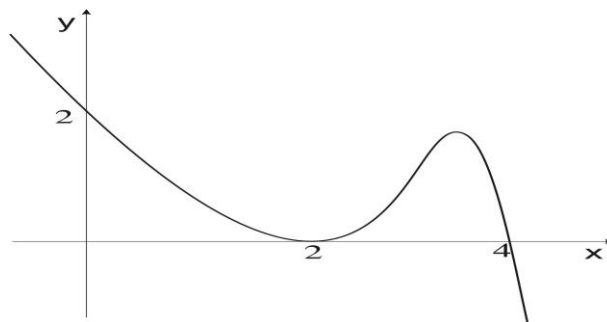
MATERIALES Y MÉTODOS

En la presente investigación, el grupo colaborativo fue constituido por los estudiantes del primer ciclo de la carrera profesional de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la asignatura de Matemática Básica, de la Universidad Nacional de Jaén (UNJ) que representan un total de 39 estudiantes.

Para la recolección de información se diseñó un cuestionario compuesto de tres actividades el cual fue validado por juicios de expertos, para el contenido del cuestionario se consideró los textos de (Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S., 2012), (Zill, D. y Wright, W. , 2011) (Lages, 1998), (Larson, R. y Edwards, B., 2010), (Duval, R., 2004, sf), (Flores, J. y Ugarte, F. , 2016), (Arce, M. y Ortega, T., 2013), (Guzman, 1998) y (Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P., 1995). Las actividades planteadas permitieron extraer información de las ideas de los estudiantes al analizar el tratamiento y el cambio de los distintos registros de representación semiótica de las funciones. En seguida se realiza el análisis a priori de cada situación planteada.

Actividad N°1

A continuación se muestra la gráfica que corresponde a un polinomio $P(x)$ de grado 3.



1. Con la información presentada en la gráfica halle:
 - i. Para qué valores de x las imágenes $P(x)$ del polinomio son positivas.
 - ii. Para qué valores de x las imágenes $P(x)$ del polinomio son negativas.
2. Halle el polinomio $P(x)$.

En esta actividad se quiere investigar ¿cómo realizan la conversión del registro gráfico al algebraico de una función polinomial de tercer grado, dada? específicamente se espera que los estudiantes

identifiquen en el mismo gráfico cuando una función es positiva o negativa, y que con los puntos dados en el gráfico puedan obtener la expresión algebraica de la función polinomio de grado tres.

En la pregunta 1 se quiere que el estudiante realice la conversión de la representación gráfica a la algebraica identificando que la función es positiva si $f(x) > 0$, para $x \in \langle -\infty, 2 \rangle \cup \langle 2, 4 \rangle$, y la función es negativa si $f(x) < 0$, para $x \in \langle 4, +\infty \rangle$, que identifique los intervalos del eje x donde la gráfica está en el primer y segundo cuadrante para la parte 1.i y para 1.ii respectivamente, se requiere que identifique los intervalos donde la gráfica está en el tercer o cuarto cuadrante, o que al menos realice un tratamiento en el mismo registro gráfico, marcando sobre la gráfica donde la función es positiva o negativa. En este caso se pueden presentar algunas dificultades debido a que no es lo mismo identificar algunos puntos x_0 para el cual la función es positiva o negativa, que identificar los intervalos para x en el cual la función es positiva o negativa. Esto quedará evidenciado cuando los estudiantes realicen la conversión entre registros.

En la pregunta 2 se requiere que los estudiantes a partir de los interceptos de la gráfica con el eje x , en los puntos $(2,0)$ y $(4,0)$, y con el eje y en el punto $(0,2)$, determinen la representación algebraica de la función polinomial de grado tres con coeficiente principal diferente de 1. Deben analizar que para usar la representación general $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ deberán conocer cuatro puntos sobre la gráfica, no necesariamente interceptos con los ejes coordenados, también puede usar la representación $f(x) = m(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$ cuando se conocen tres raíces diferentes y otro punto cualquiera en la gráfica. Como los anteriores no es el caso, deben considerar la representación $f(x) = m(x-r_1)^2(x-r_2)$ ya que la gráfica dada presenta sólo dos interceptos con el eje x y uno con el eje y , es decir el estudiante debe tener en cuenta que la función presenta una raíz de multiplicidad dos, y un intercepto con el eje y . Para lograr su objetivo deben hacer la conversión del registro gráfico al registro tabular y luego del registro tabular al registro algebraico, o pueden hacer directamente la conversión del registro gráfico al algebraico.

Actividad N°2

La tarifa de energía eléctrica es de S/ 0.49 por cada kWh hasta los primeros 200 kWh. Luego, por cada kWh adicional por encima de los 200, la tarifa es de S/ 0.58.

1. Si se consume 250 kWh en un mes, cuál es el pago mensual.

2. Si en la UNJ se consume x kwh en un mes, exprese algebraicamente el pago $P(x)$ por consumo de energía eléctrica en función de x .
3. Graficar la función obtenida en 2.
4. Hallar el pago del recibo del mes de junio en la UNJ si el consumo es de 2481 kWh.

En esta actividad, se espera que los estudiantes comprendan el problema contextualizado, poniendo en juego sus capacidades de interpretación, describir y conjeturar gráficamente situaciones descritas de la vida real.

En la pregunta 1 se espera que los estudiantes realicen el cálculo de acuerdo a la información dada sin ninguna dificultad.

En la pregunta 2 se espera que los estudiantes con la información dada, puedan expresar la forma analítica de la función que representa a la mencionada situación. Esto se verá plasmado cuando los estudiantes respondan a esta pregunta.

En la pregunta 3 se espera que los estudiantes no tengan dificultad en construir la gráfica de la función obtenida en la pregunta 2 o independiente de está, para este caso específico se desea que los estudiantes no tengan obstáculos y procedan como el caso anterior.

En la pregunta 4 se espera que los estudiantes realicen el cálculo de acuerdo a la información dada o reemplazando los datos en la expresión analítica obtenida en la pregunta 2, sin ninguna dificultad. Para este caso específico se desea que los estudiantes no tengan obstáculos y procedan como lo hicieron en la pregunta 1

Actividad N°3

Durante una colisión, la fuerza F (en newton) que actúa sobre un objeto varía con el tiempo t de acuerdo con la ecuación $F = 87t - 21t^2$, donde t está dado en segundos.

1. ¿Para qué valor de t se obtiene una fuerza máxima?
2. ¿Cuál fue el valor máximo de la fuerza?
3. Graficar la función F .

En esta actividad, se espera que los estudiantes tengan conocimientos básicos de función cuadrática y recuerde que su representación gráfica es una parábola.

En las preguntas 1 y 2 se espera que los estudiantes completen cuadrados en la expresión dada para obtener una expresión de la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$ y a partir de esto identificar el vértice (h, k) lo

cual daría repuesta a lo pedido de estas dos preguntas, también puede que los estudiantes puedan encontrar los valores del vértice usando las siguiente expresiones $h = \frac{-b}{2a}$ y $k = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$, donde estas expresiones son resultados de realizar un tratamiento en el mismo registro analítico o algebraico. Esto se verá plasmado cuando los estudiantes respondan a estas preguntas.

En la pregunta 3 se espera que los estudiantes recuerden que la gráfica de la función presentada es una parábola y reconociendo el vértice con el coeficiente principal de dicha función no tendrá dificultad de construir la mencionada gráfica. Esto se verá modelado cuando los estudiantes respondan a esta pregunta.

RESULTADOS

Aquí se hace el análisis a posteriori de cada actividad planteada, clasificando las respuestas descritas por los estudiantes en: respuestas correctas, incorrectas y abstenciones. Se considera que una respuesta es correcta cuando está conforme con la teoría científica, incorrectas es aquella que es diferente a la teoría científica y abstención es la pregunta que no ha sido respondida por el estudiante, a esta última se le da esa jerarquía por que la solución a cada pregunta fue voluntaria

Análisis de la actividad N°1

En general, con relación al cambio de registro de representación gráfica al numérico y luego del registro gráfico al registro algebraico, se observó que: en la pregunta 1.i. solo 2 estudiantes pudieron determinar los intervalos pedidos, es decir, que identificaron los valores donde la función es positiva o que están en el primer y segundo cuadrante. En términos de la teoría de registros significa que estos estudiantes pueden realizar el cambio del registro gráfico al algebraico. Mientras que 25 estudiantes no pudo realizar la conversión del registro gráfico al registro analítico, esto significa que algunos dieron como respuesta valores enteros positivos del eje de la abscisa y otros el semieje positivo que lo representaron por $x > 0$, otros estudiantes redactaron que si la gráfica del polinomio está a la derecha del eje y es positiva, mientras que otros dieron como respuestas algunos intervalos donde la función es positiva como por ejemplo $(0,2)$, $(0,3)$, $(0,4)$ etc., y 12 estudiantes se abstuvo a responder.

En la pregunta 1.ii solo 2 estudiantes pudieron determinar los intervalos pedidos, es decir, que identificaron los valores donde la función es negativa o que están en el tercer y cuarto cuadrante. En términos de la teoría de registros significa que estos estudiantes pueden realizar el cambio del registro

gráfico al algebraico. Mientras que 24 estudiantes no pudo hacer la conversión del registro gráfico al registro analítico, algunos estudiantes dieron como respuesta valores negativos del eje de la abscisa y otros lo representaron por $x < 0$, otros estudiantes redactaron que si la gráfica del polinomio está a la izquierda del eje y es negativa, mientras que algunos dieron como respuestas solo algún intervalo que no cumple con la condición como por ejemplo $(-\infty, -1]$, y 13 de los estudiantes se abstuvo de responder.

En la pregunta 2, ningún estudiantes llegó a obtener correctamente la expresión algebraica de la función polinomio de grado tres, esto se debió a que, de los 20 estudiantes que respondieron consideraron la expresión algebraica de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ y su dificultad fue hallar los coeficientes ya que identificaron sólo tres puntos como pares ordenados, de acuerdo la teoría de cambio de registros, significa que estos estudiantes no tomaron en cuenta las raíces y su multiplicidad para ser el cambio del registro gráfico al algebraico. Mientras que 19 estudiantes se abstuvieron de responder.

En conclusión, en esta actividad, la mayoría de los estudiantes que respondieron a las preguntas, no realizaron correctamente la conversión entre registros de representación como se planificó en el análisis a priori.

Análisis de la actividad N°2

En general, con relación al cambio de registro de representación verbal al registro numérico y luego al algebraico, en la pregunta 1, se observó que 20 estudiantes no tuvieron dificultad en identificar las variables que intervienen en la situación y diferencian el costo de cada kWh de acuerdo al consumo, en términos de la teoría de registro estos estudiantes realizaron en forma apropiada el cambio de registro verbal al numérico. Por otro lado, 15 estudiantes presentaron dificultad para encontrar el pago de los 250 kWh, pensamos que se debe a que realizaron una lectura poco analítica e interpretativa del enunciado. Mientras que 4 estudiantes se abstuvieron de responder.

En la pregunta 2, se observó que 1 estudiante no tuvo dificultad en el cambio de registro del verbal al algebraico, esto significa que expreso el pago mensual de consumo como una función seccionada. Por otro lado, 25 estudiantes tuvieron dificultad en el cambio de registro, esto se evidencia ya que los estudiantes tienen dificultad en generalizar el número de kWh estos sólo hacen el cálculo con valores numéricos, mientras que 13 estudiantes se abstuvieron de responder.

En la pregunta 3, se observó que ningún estudiante realizó en forma correcta la gráfica que modele al problema contextualizado, en términos de la teoría de registro, 20 estudiantes que respondieron a esta pregunta no lograron hacer el cambio de registro del algebraico al gráfico, notamos que esto se debe, a la forma algebraica encontrada en la pregunta 2 para la función $P(x)$. Por otro lado, 19 estudiantes se abstuvieron de responder.

En la pregunta 4, se observó que 13 estudiantes no tuvieron dificultad en encontrar el valor pago por consumo indicado como lo hicieron en la pregunta 1, se evidencia que los estudiantes realizaron el cálculo independiente de la función obtenida en la pregunta 2. Por otro lado, 14 estudiantes tuvieron la dificultad para responder a la pregunta, esto se evidencia que en su mayoría de estos realizaron una lectura poco analítica e interpretativa del enunciado, mientras que 12 estudiantes se abstuvieron de responder.

En conclusión, en esta actividad, la mayoría de los estudiantes que respondieron toda la situación, no realizaron correctamente la conversión del registro de representación verbal al registro de representación numérica y luego del registro numérico al analítico y por lo tanto al registro algebraico como se planificó en el análisis a priori.

Análisis de la actividad N°3

En general, con relación al cambio de registro de representación algebraica al registro numérico y luego al gráfico, en las preguntas 1 y 2, se observó que ningún estudiante contesto como se planificó en el análisis a priori. Por otro lado en promedio 23 estudiantes respectivamente presentaron dificultades para responder a ambas preguntas, se evidencia en su proceso, ya que para obtener el punto máximo de la parábola han recurrido al registro tabular dando valores a la variable t y luego compararon los valores de la imágenes y deducen el valor máximo para la fuerza F , pero esto lo hicieron con valores enteros lo cual de acuerdo a la ecuación no llegaron al vértice correcto, ninguno de estos estudiante intento trabajar haciendo el tratamiento en el registro de representación algebraica para expresar la función cuadrática en su forma estándar $f(x) = a(x-h)^2 + k$ y a partir de esto identificar el vértice (h,k) lo cual daría repuesta a lo pedido de estas dos preguntas, tampoco aplicaron las formulas

$h = -\frac{b}{2a}$ y $k = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$, para hallar el vértice. Mientras que en promedio 16 estudiantes respectivamente se abstuvo de responder.

En la pregunta 3, se observó que ningún estudiante hizo el gráfico de la parábola correctamente como se planificó en el análisis a priori, por otro lado, 19 estudiantes tuvieron dificultad para hacer el cambio entre registros de representación semiótica, esto es pasar del registro analítico al gráfico, como evidencia hay estudiantes que no tiene la noción de parábola puesto que la mayoría de estos graficaron dos rectas que se interceptan y culminan en el vértice. Mientras que 20 estudiantes se abstuvieron de responder.

En conclusión, los estudiantes que respondieron toda la actividad, no realizaron correctamente la conversión del registro algebraico al registro numérico y luego del registro numérico al gráfico como se planificó en el análisis a priori.

DISCUSIÓN

El estudio exploratorio, arroja que los estudiantes poseen escaso análisis e interpretación de las funciones en sus diferentes registros de representación semiótica, además en la utilización del cambio de registro de representación es deficiente en los 20 estudiantes promedio que respondieron a las preguntas de conversión entre los distintos registros de representación semiótica. Por otro lado también muestran dificultades en el tratamiento de los distintos registros de representación semiótica del objeto función, estos resultados es contrario a los de (Guzmán, 1998) quien concluye que las respuestas eran dadas en un solo registro, sin coordinar explícitamente dos o más, por otro lado se coincide con (Arce, M. y Ortega, T., 2013) quien concluye que las deficiencias identificadas pueden estar causadas por problemas del alumno al reproducir, a través de un deficiente trazado en la representación gráfica de la función sobre el papel, o el comportamiento o propiedades de la función o sus elementos, que el alumno tiene correctamente interiorizados en sus esquemas conceptuales.

Se observó que, en las respuestas dadas, en el cual está planteada la pregunta, o recurren al registro algebraico para intentar resolver la situación, y esto sucede porque así le enseñaron en clase, quedando de esta manera evidenciada la enseñanza algorítmica tradicional.

CONCLUSIONES

El estudio exploratorio realizado a los estudiantes de la escuela profesional de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Nacional de Jaén, arroja escaso análisis e interpretación de las funciones en sus diferentes formas de representación semiótica, se evidencia que, en la utilización del tratamiento en

los registros como la conversión entre ellos es deficiente en los 20 estudiantes que respondieron a las preguntas de las actividades cognitivas ligadas a la semiosis.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arce, M. y Ortega, T. (2013). Deficiencias en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de bachillerato. *PNA*, 61-73.
- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (1995). Ingeniería didáctica. *Ingeniería didáctica en educación matemática* , 33-60.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizaje intelectuales* . Cali: Universidad del Valle.
- Duval, R. (s.f.). Registro de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Didáctica: Investigaciones en matemática educativa II*, 173-201.
- Flores, J. y Ugarte, F. . (2016). *Investigaciones en educación matemática*. Lima: Fondo editorial Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Guzman, R. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Relime*, 5-21.
- Justin, J., Oliveira, C. y Moreno, L. (2014). Registros de representacao semiótica e geometria analítica: uma experiencia com futuros professores. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 131-136.
- Lages, L. (1998). *Curso de análise volumen 1 (6° ed.)* . Brasil: IMPA.
- Larson, R. y Edwards, B. (2010). *Cálculo 1 de una variable*. México: McGraw-Hill/Interamericana Editores, S. A de C. V.
- Malaspina, U. (2012). *Didáctica de las matemáticas: avances y desafíos actuales*. Lima : Pontificia Universidad Católica.
- Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012). *Precálculo: Matemáticas para el Cálculo* . México: Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.
- Zill, D. y Wright, W. . (2011). *Cálculo. Trascendentes tempranas*. México: McGraw-Hill/Interamericana Editores, S. A. de C. V. .