Serret: Software para el cálculo del tiedro Frenet Serret de curvas dadas por la intersección de dos superficies paramétricas

Serret: Software for calculating the Frenet Serret soil of curves given by the intersection of two parametric surfaces

Judith K. Jiménez V [*] [1].

RESUMEN

En geometría diferencial, el estudio de las curvas es esencial, dentro de ese tema es de especial interés el triedro de Frenet-Serret. El objetivo de este trabajo de investigación fue implementar un algoritmo a partir de los estudios desarrollados por Ye; que nos permita calcular el tiedro de Frenet-Serret, su gráfica, además de estimar la curvatura y torsión en un punto de la curva de intersección de dos superficies paramétricas. Se utilizó el software científico Mathematica v.11.2 sobre el sistema operativo Windows 10. Por lo tanto, se obtuvo una herramienta denominada software serret, que puede servir de ayuda para quienes estén interesados en entender las superficies.

Palabras clave: Aparato de Frenet Serret, intersección de superficies, curvas espaciales.

ABSTRACT

In differential geometry, the study of curves is essential, within this subject the Frenet-Serret trihedron is of special interest. The objective of this research work was to implement an algorithm based on the studies developed by Ye; that allows us to calculate the Frenet-Serret tiedro, its graph, in addition to estimating the curvature and torsion at a point on the intersection curve of two parametric surfaces. The scientific software Mathematica v.11.2 was used on the Windows 10 operating system. Therefore, a tool called serret software was obtained, which can help those who are interested in understanding surfaces.

Keywords: Frenet Serret apparatus, surface intersection, spatial curves.

DOI: https://doi.org/10.37787/pakamuros-unj.v8i1.116

Recibido: 17/02/2020. Aceptado: 28/03/2020

[*] Autor para correspondencia

[1.] Universidad Nacional de Piura, Perú. Email: jjimenezv@unp.edu.pe

INTRODUCCIÓN

Jean Frédéric Frenet (1816-1900) en su tesis doctoral, hacia 1847 y Joseph Alfred Serret (1819-1885) en 1851 de manera independiente obtuvieron el mismo conjunto de fórmulas que actualmente se le conoce como fórmulas de Frenet-Serret que nos permiten calcular tres vectores ortonormales llamados vectores tangente, normal y binormal que en su conjunto es llamado el triedro móvil de Frenet-Serret; a partir de estos vectores es posible construir los planos osculador, normal y rectificante y los conceptos de curvatura y torsión, que nos darán información del comportamiento de la curva en el espacio.

Usualmente para calcular el triedro móvil de Frenet-Serret es necesario tener una parametrización de la curva, el problema surge cuando no es posible encontrar una parametrización de dicha curva, situación que se presenta en la mayoría de los casos cuando la curva es obtenida por la intersección de dos superficies; este problema es abordado ampliamente en (Ye, 1999) desarrollando nuevos algoritmos para lograr calcular el aparato de Frenet-Serret así como la curvatura y torsión.

Curvas parametrizadas

Supongamos el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ dotado del sistema de coordenadas $OXYZ$. Una curva α parametrizada en este espacio es la representación gráfica de una función del tipo:

$$\alpha(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) \tag{1}$$

Donde t se le denomina el parámetro, $t\epsilon I \subset \mathbb{R}$. La estructura de la curva dependerá de las funciones $x(t), y(t)$ y $z(t)$. Diremos que α es de clase $C^r(I)$, si su parametrización $\alpha(t)$ lo es, es decir si las funciones componentes $x(t), y(t)$ y $z(t)$ son de clase$C^r(I)$.

Aparato de Frenet-Serret

Dada una curva C, $\alpha(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ en $\mathbb{R}^3$ de clase $C^r(I), r \geq 1$ donde $I \subseteq \mathbb{R}$ definimos el vector tangente unitario como:

$$T(t) = \frac{\alpha\prime(t)}{\|\alpha\prime(t)\|} \tag{2}$$

El vector normal unitario se define como:

$$N(t) = \frac{T\prime(t)}{\|T\prime(t)\|} \tag{3}$$

El vector binormal unitario se define como:

$$B(t) = T(t) \times N(t) \tag{4}$$

La triada de vectores $\{T(t), N(t), B(t)\}$ se le denomina el marco ortonormal de Frenet.

Dada una curva en $\mathbb{R}^3$, con representación paramétrica natural $\alpha(s)$, definimos la curvatura y torsión, como:

$$\kappa(s) = \|T'(s)\| \tag{5}$$

$$\tau(s) = -\dot{B}(s)N(s) \tag{6}$$

Superficie

Se dice que la superficie S en el sistema de coordenadas $OXYZ$ tiene la ecuación:

$$S: F(x, y, z) = 0 \tag{7}$$

Si se cumple la siguiente condición: el punto $M(x, y, z)\epsilon S$ si y solo si sus coordenadas x, y, z satisfacen la ecuación (1). Si en particular $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ entonces (1) puede ser escrita de la forma:

$$S: z = f(x, y) \tag{8}$$

En este caso S coincide con la gráfica de la función de dos variables $f(x, y)$.

Asumimos que $F(x, y, z) = 0$ es una superficie implícita regular es decir $\nabla F \neq 0$, donde $\nabla F = \left(F_x, F_y, F_z\right)$ es el vector gradiente de la superficie F, el vector normal unitario a la superficie F está dado por:

$$F = N = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} \tag{9}$$

Representación paramétrica de superficies

Sea D una región del plano UV y

$$S = S(u,v) = \left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right) \tag{10}$$

Una función vectorial de D en $\mathbb{R}^3$. Cuando (u,v) varía en D, los puntos imágenes (x, y, z) con

$$x = x(u,v) \qquad y = y(u,v) \qquad z = z(u,v) \tag{11}$$

Describen una superficie S, llamada superficie paramétrica, la ecuación (3) se denomina ecuación vectorial de S y la ecuación (4) se denominan ecuaciones paramétricas de S.

Asumimos que $R(u,v)$ es una superficie paramétrica regular, es decir que $R_u \times R_v \neq 0$. El vector normal de la superficie S está dado por:

$$N = \frac{S_u \times S_v}{\|S_u \times S_v\|} \tag{12}$$

En este contexto, el objetivo general de este trabajo fue elaborar un programa, empleando el lenguaje del software Mathematica para calcular el aparato de Frenet-Serret para curvas dadas como la intersección de dos superficies paramétricas.

MATERIALES Y MÉTODOS

Los algoritmos para lograr calcular el aparato de Frenet-Serret tanto la curvatura y torsión de curvas obtenidas como la intersección de dos superficies paramétricas se han implementado en una computadora con una distribución Windows a 64 bits, usando el software científico Mathematica v.11.2

RESULTADOS

Se ha implementado en el software científico Wolfram Mathematica v.11.2, el programa Serret, ver Figura 1. El cual permite obtener:

- Cada uno de los parámetros necesarios, para la obtención del aparato de Frenet-Serret, curvatura y torsión.
- Visualizar los vectores tangentes (rojo), normal (verde) y binormal (celeste) de la curva en un punto dado por el usuario
- Permite observar la gráfica de la intersección de las dos superficies paramétricas.

Con el software Serret se ha desarrollado tres ejemplos: Para ello se debe conocer las ecuaciones del aparato de Frenet-Serret en un punto genérico de la curva, es necesario ingresar las ecuaciones de las superficies paramétricas, así también sus valores en un punto específico de la curva el cual se debe ingresar y el programa nos devuelve los valores numéricos del triedro móvil de Frenet-Serret, curvatura y torsión, ver Figura 2 a Figura 4.

 https://doi.org/10.37787/pakamuros-unj.v8i1.116

```
In[1]:= Frenet[S1 : {_, _, _}, S2 : {_, _, _}, {u_, v_}, {p_, q_},
    OptionsPattern[ParVals → Automatic]] :=
   Module[{pp = OptionValue[ParVals], xu, xv, yp, yq, N1, N2, h, h1, h2, h3,
     h4, Δh, λ, t, LL, K, n, b, D2h, τ},
    xu = D[S1, u];
    xv = D[S1, v];
    yp = D[S2, p];
    yq = D[S2, q];
    N1 = Cross[xu, xv];
    N2 = Cross[yp, yq];
    h = Cross[N1, N2];
    h1 = -xv.N2;
    h2 = xu.N2;
    h3 = N1.yq;
    h4 = -N1.yp;
    Δh = h1 D[h, u] + h2 D[h, v] + h3 D[h, p] + h4 D[h, q];
    λ = Sqrt[h.h];
    t = h / λ;
    LL = Δh.t;
    K = Sqrt[(Δh.Δh - LL^2) / λ^4];
    n = (Δh - LL t) / (λ^2 K);
    b = Cross[t, n];
    D2h = h1 D[Δh, u] + h2 D[Δh, v] + h3 D[Δh, p] + h4 D[Δh, q];
    τ = D2h.b / (λ^3 K);
    If[pp === Automatic, {t, n, b, K, τ},
     {t, n, b, K, τ} /. MapThread[Rule, {{u, v, p, q}, pp}]]
   ]
```

Figura 1. Implementación en el Sotware Mathematica del tiedro de Frenet-Serret.

Ejemplo 1

Sea la curva C dada como la intersección de las superficies $S(u,v) = (u, uv, v)$ y $R(p,q) = (p, q, q^2 + 2)$. Hallar el vector tangente, normal y binormal unitarios, curvatura y torsión en el punto $(0,0,2)$.

```
In[2]:= Serret[{u, u v, v}, {p, q, q^2 + 2}, {u, v}, {p, q}] // Simplify
```

Out[2]=

$$\left\{\left\{\frac{-1+2\,q\,u}{\sqrt{(1-2\,q\,u)^2+v^2+4\,q^2\,v^2}},\,-\frac{v}{\sqrt{(1-2\,q\,u)^2+v^2+4\,q^2\,v^2}},\,-\frac{2\,q\,v}{\sqrt{(1-2\,q\,u)^2+v^2+4\,q^2\,v^2}}\right\},\right.$$

$$\left\{-\frac{v^2\,\left(8\,q^3-4\,q^2\,u-16\,q^4\,u+u\,v+2\,q\,(1+v)\right)}{\left(1-4\,q\,u+v^2+4\,q^2\,(u^2+v^2)\right)^2\sqrt{\frac{v^2\,\left(-64\,q^5\,u+64\,q^6\,u^2+16\,q^4\,(1+u^2)+4\,q\,u\,v-16\,q^3\,u\,(1+v)+q^2\,(4-8\,(-1+u^2)\,v)+v^2\,(1+u^2+v^2)\right)}{\left(1-4\,q\,u+v^2+4\,q^2\,(u^2+v^2)\right)^3}}},\right.$$

$$\frac{v\,\left(-8\,q^2\,u+8\,q^3\,u^2+u\,v-2\,q\,(-1+u^2\,v+v^3)\right)}{\left(1-4\,q\,u+v^2+4\,q^2\,(u^2+v^2)\right)^2\sqrt{\frac{v^2\,\left(-64\,q^5\,u+64\,q^6\,u^2+16\,q^4\,(1+u^2)+4\,q\,u\,v-16\,q^3\,u\,(1+v)+q^2\,(4-8\,(-1+u^2)\,v)+v^2\,(1+u^2+v^2)\right)}{\left(1-4\,q\,u+v^2+4\,q^2\,(u^2+v^2)\right)^3}}},$$

$$\left.\frac{v\,\left(4\,q^2-16\,q^3\,u+16\,q^4\,u^2+v-2\,q\,u\,v+v^3\right)}{\left(1-4\,q\,u+v^2+4\,q^2\,(u^2+v^2)\right)^2\sqrt{\frac{v^2\,\left(-64\,q^5\,u+64\,q^6\,u^2+16\,q^4\,(1+u^2)+4\,q\,u\,v-16\,q^3\,u\,(1+v)+q^2\,(4-8\,(-1+u^2)\,v)+v^2\,(1+u^2+v^2)\right)}{\left(1-4\,q\,u+v^2+4\,q^2\,(u^2+v^2)\right)^3}}}\right\},$$

$$\left\{-\frac{v^3}{\left(1-4\,q\,u+v^2+4\,q^2\,(u^2+v^2)\right)^{3/2}\sqrt{\frac{v^2\,\left(-64\,q^5\,u+64\,q^6\,u^2+16\,q^4\,(1+u^2)+4\,q\,u\,v-16\,q^3\,u\,(1+v)+q^2\,(4-8\,(-1+u^2)\,v)+v^2\,(1+u^2+v^2)\right)}{\left(1-4\,q\,u+v^2+4\,q^2\,(u^2+v^2)\right)^3}}},\right.$$

$$\frac{v\,\left(4\,q^2-8\,q^3\,u+v\right)}{\left(1-4\,q\,u+v^2+4\,q^2\,(u^2+v^2)\right)^{3/2}\sqrt{\frac{v^2\,\left(-64\,q^5\,u+64\,q^6\,u^2+16\,q^4\,(1+u^2)+4\,q\,u\,v-16\,q^3\,u\,(1+v)+q^2\,(4-8\,(-1+u^2)\,v)+v^2\,(1+u^2+v^2)\right)}{\left(1-4\,q\,u+v^2+4\,q^2\,(u^2+v^2)\right)^3}}},$$

$$\left.-\frac{v\,\left(2\,q-4\,q^2\,u+u\,v\right)}{\left(1-4\,q\,u+v^2+4\,q^2\,(u^2+v^2)\right)^{3/2}\sqrt{\frac{v^2\,\left(-64\,q^5\,u+64\,q^6\,u^2+16\,q^4\,(1+u^2)+4\,q\,u\,v-16\,q^3\,u\,(1+v)+q^2\,(4-8\,(-1+u^2)\,v)+v^2\,(1+u^2+v^2)\right)}{\left(1-4\,q\,u+v^2+4\,q^2\,(u^2+v^2)\right)^3}}}\right\},$$

$$2\,\sqrt{\frac{v^2\,\left(-64\,q^5\,u+64\,q^6\,u^2+16\,q^4\,(1+u^2)+4\,q\,u\,v-16\,q^3\,u\,(1+v)+q^2\,(4-8\,(-1+u^2)\,v)+v^2\,(1+u^2+v^2)\right)}{\left(1-4\,q\,u+v^2+4\,q^2\,(u^2+v^2)\right)^3}},$$

$$\left.\frac{3\,v\,\left(4\,q^2-8\,q^3\,u-v+4\,q\,u\,v\right)}{-64\,q^5\,u+64\,q^6\,u^2+16\,q^4\,(1+u^2)+4\,q\,u\,v-16\,q^3\,u\,(1+v)+q^2\,(4-8\,(-1+u^2)\,v)+v^2\,(1+u^2+v^2)}\right\}$$

```
In[3]:= {t, b, n, κ, τ} = Serret[{u, u v, v}, {p, q, q^2 + 2}, {u, v}, {p, q}, ParVals → {0, 2, 0, 0}]
```

Out[3]=

$$\left\{\left\{-\frac{1}{\sqrt{5}},\,-\frac{2}{\sqrt{5}},\,0\right\},\,\{0,\,0,\,1\},\,\left\{-\frac{2}{\sqrt{5}},\,\frac{1}{\sqrt{5}},\,0\right\},\,\frac{8}{5},\,-\frac{3}{5}\right\}$$

```
In[4]:= pp = {0, 0, 2};
        Show[
         ParametricPlot3D[{u, u v, v}, {u, -1, 1}, {v, 1, 3}, PlotStyle → Opacity[0.75]],
         ParametricPlot3D[{p, q, q^2 + 2}, {p, -1, 1}, {q, -1, 1},
          PlotStyle → {Blue, Opacity[0.75]}],
         Graphics3D[{{AbsolutePointSize[8], Point[pp]}, {Red, Arrow[Tube[{pp, pp + t}]]},
           {Green, Arrow[Tube[{pp, pp + n}]]},
           {Cyan, Arrow[Tube[{pp, pp + b}]]}}]
        ]
```

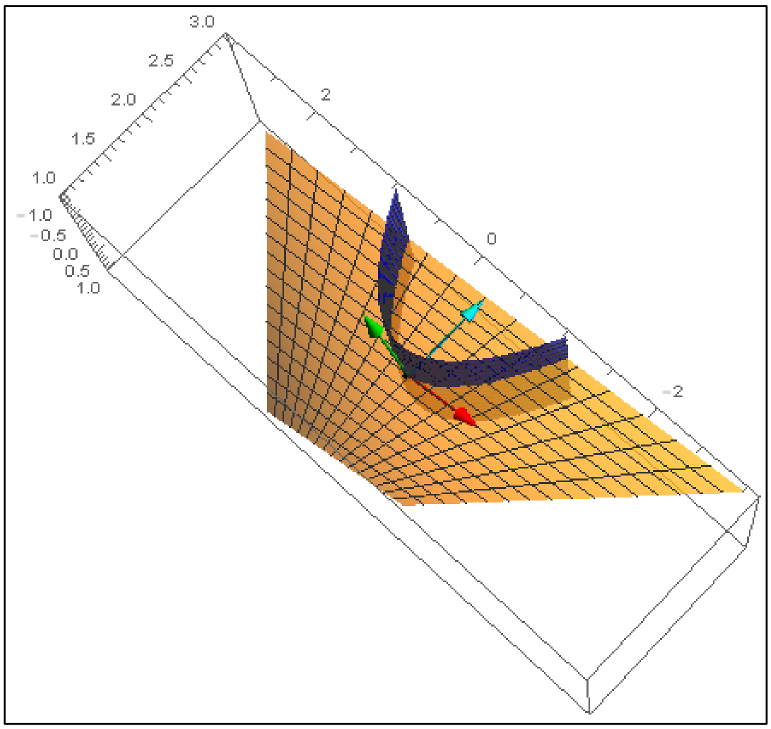

Figura 2. Intersección de dos superficies paramétricas del ejemplo 1.

Ejemplo 2

Sea la curva C dada como la intersección de las superficies $S(u,v) = \left(cos(u)cos(v), cos(v)sen(u), sen(v)\right)$ y $R(p,q) = \left(\frac{1}{2}cos(p) + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}sen(p), q\right)$. Hallar el vector tangente, normal y binormal unitarios, curvatura y torsión en el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

```
In[6]:= {t, b, n, κ, τ} = Serret[{Cos[u] Cos[v], Cos[v] Sin[u], Sin[v]},
   {1/2 Cos[p] + 1/2, 1/2 Sin[p], q}, {u, v}, {p, q}, ParVals → {Pi/4, Pi/4, Pi/2, 1/Sqrt[2]}]
```

$$\text{Out[6]}= \left\{\left\{-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}, \left\{-\frac{1}{\sqrt{39}}, -2\sqrt{\frac{3}{13}}, -\sqrt{\frac{2}{39}}\right\}, \left\{\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{1}{\sqrt{13}}, 2\sqrt{\frac{2}{13}}\right\}, \frac{2\sqrt{\frac{13}{3}}}{3}, \frac{6\sqrt{2}}{13}\right\}$$

```
In[7]:= pp = {1/2, 1/2, 1/Sqrt[2]};
   Show[
    ParametricPlot3D[{Cos[u] Cos[v], Cos[v] Sin[u], Sin[v]}, {u, -Pi, Pi},
     {v, -Pi, Pi}, PlotStyle → Opacity[0.25]],
    ParametricPlot3D[{1/2 Cos[p] + 1/2, 1/2 Sin[p], q}, {p, -Pi, Pi}, {q, -1, 1},
     PlotStyle → {Blue, Opacity[0.75]}],
    Graphics3D[{{AbsolutePointSize[8], Point[pp]}, {Red, Arrow[Tube[{pp, pp + t}]]},
      {Green, Arrow[Tube[{pp, pp + n}]]},
      {Cyan, Arrow[Tube[{pp, pp + b}]]}}], PlotRange → All
   ]
```

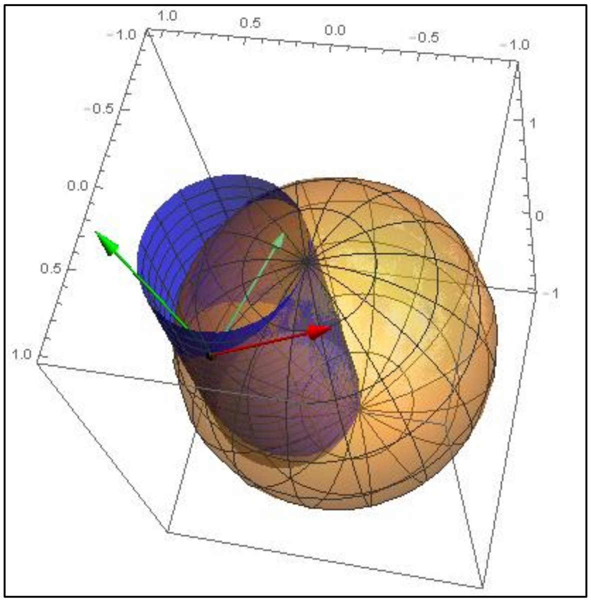

Figura 3. Intersección de las dos superficies paramétricas del ejemplo 2.

Ejemplo 3

Sea la curva C dada como la intersección de las superficies $S(u,v) = (2sen(u), 2cos(u), v)$ y $R(p,q) = (p,q,q^2)$. Hallar el vector tangente, normal y binormal unitarios, curvatura y torsión en el punto $(0,2,0)$.

```
In[11]:= {t, b, n, κ, τ} = Serret[{2 Sin[u], 2 Cos[u], v}, {p, q, p^2},
          {u, v}, {p, q}, ParVals → {0, 0, 0, 2} // N]

Out[11]= {{-1., 0., 0.}, {0., -0.242536, 0.970143},
          {0., 0.970143, 0.242536}, 2.06155, 0.}
```

```
In[12]:= pp = {0, 2, 0};
         Show[ParametricPlot3D[{2 Sin[t], 2 Cos[t], 4 (Sin[t]) ^2},
           {t, -2 Pi, 2 Pi}, PlotStyle → {Yellow, Opacity[0.75]}],
          ParametricPlot3D[{2 Sin[u], 2 Cos[u], v}, {u, -2 Pi, 2 Pi},
           {v, -2, 6}, PlotStyle → Opacity[0.25]],
          ParametricPlot3D[{p, q, p^2}, {p, -2.5, 2.5}, {q, -4, 4},
           PlotStyle → {Blue, Opacity[0.75]}],
          Graphics3D[{{AbsolutePointSize[8], Point[pp]},
            {Red, Arrow[Tube[{pp, pp + 2 t}]]},
            {Green, Arrow[Tube[{pp, pp + 2 n}]]},
            {Cyan, Arrow[Tube[{pp, pp + 2 b}]]}}],
          PlotRange → All
         ]
```

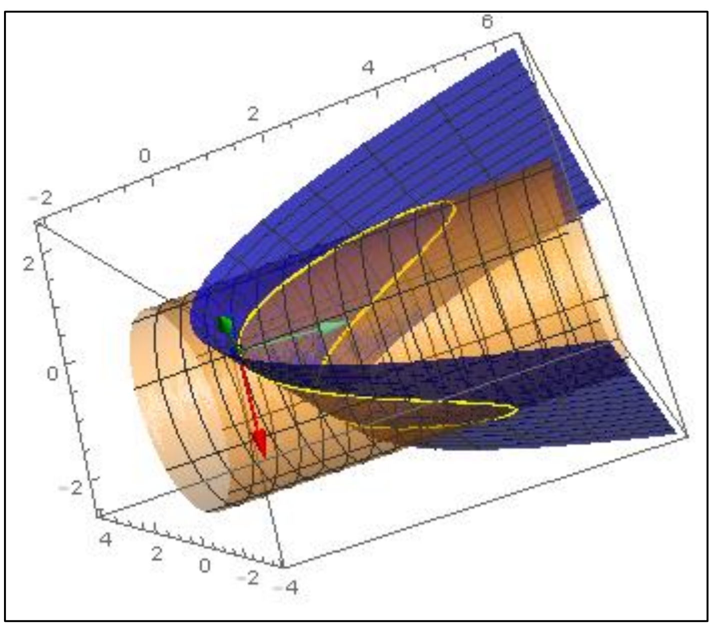

Figura 4. Intersección de las dos superficies paramétricas del ejemplo 3.

DISCUSIÓN

En los tres ejemplos mostrados, Serret nos muestra los valores del aparato de Frenet-Serret, curvatura y torsión en un punto dado de la curva de intersección, también nos permite visualizar la intersección de dos superficies paramétricas dándonos una idea de la representación gráfica de la curva de intersección. En el ejemplo 1 el software nos presenta las ecuaciones del aparato de Frenet-Serret en un punto genérico dándonos cuenta que realizar esos cálculos de forma manual sería una tarea muy engorrosa. En los ejemplos 2 y 3 puede notarse que fue posible visualizar la curva de intersección de ambas superficies, dicha curva fue calculada en forma manual y su ecuación agregada al código del algoritmo, se recomendaría en un futuro trabajo implementar al algoritmo la propiedad de calcular la ecuación de dicha curva de intersección.

Este trabajo de investigación se desarrolló como una continuación del trabajo de (Graciela Burgos N., 2019) donde se implementa un algoritmo en Wolfram Mathematica v.11.2 para calcular el aparato de Frenet-Serret para curva dada como intersección de dos superficies implícitas cuyos resultados, teniendo como base las investigaciones realizadas en (Maekawa, 2009).

CONCLUSIONES

Este trabajo nos permitió calcular y graficar el aparato de Frenet-Serret, curvatura y torsión de una curva de intersección de dos superficies paramétricas, teniendo como fundamento los estudios realizados en (Ye, 1999), de una manera sencilla evitando los cálculos engorrosos y tediosos con la ventaja de obtener una vista del problema.

Los resultados obtenidos en el algoritmo en los ejemplos aplicados son iguales a los calculados por el autor.

El software Serret es un recurso didáctico de gran ayuda para quienes estén interesados en entender las superficies.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abdel-All, N. H. (2012). Intersection curves of two implicit surfaces in R3. *J. Math. Comput. Sci*, 152-171.

Aléssio, O. (2006). Geometria Diferencial de Curvas de Interseção de Duas Superfícies Implícitas. *TEMA-Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, 169-178.

Asteasu, C. (1988). Intersección de superficies arbitrarias. *Diseño asistido por computadora*, 533-538.

Bolgov, V. (1983). *Problemas de Matemáticas Superiores.* URSS: Editorial MIR Tomo 1.

Bruce F. Torrence, E. A. (2019). *Introducción del estudiante a Mathematica y Wolfram Language.* Cambridge University Press.

Cai-Yun Li, R.-H. W.-G. (2011). Parametric representation of a surface pencil with a common line of curvature. *Computer-Aided Design*, 1110–1117.

Carmo, M. P. (2016). *Geometría diferencial de curvas y superficies.* Rio de Janeiro,Brazil: Publicaciones de Courier Dover.

Düldül Mustafa, Ö. A. (2013). Willmore-like methods for the intersection of parametric (hyper) surfaces. *Applies Mathematics and Computation*, Vol 226.

Düldül, M. &. (2014). Willmore-like methods for the intersection of parametric (hyper) surfaces. *Applied Mathematics and Computation*, 516-527.

Elsa Abbena, S. S. (2017). *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica.* Estados Unidos de América: CRC Press.

Graciela Burgos N., J. J. (2019). Cálculo del aparato de Frenet Serret de curvas dadas por la intersección de dos superficies implícitas en R3 utilizando el software Wolfram Mathematica v.11.2. *Selecciones Matemáticas*, 338-347.

Maekawa, T. (2009). *Interrogation for computer aided desing and manufacturing.* New York: Springer Science Business Media.

Soliman, M. A. (2011). Intersection curves of implicit and parametric surfaces in R3. *Applied Mathematics, Vol 2*.

Wolfram, S. (2019). *Un Introduction Elemental a Wolfram Languaje.* WOLFRAM MEDIA Incorporated.

Ye, X. Y. (1999). Differential geometry of intersection curves of two surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, Vol 16.